NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.
- **Secciones:**

A : Prof. Wilfred Flores. **C** : Prof. Cristian Mardones
B : Prof. Roque Bustamante. **D** : Prof. Armin Gusenbauer.

Nota$=1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIÓN

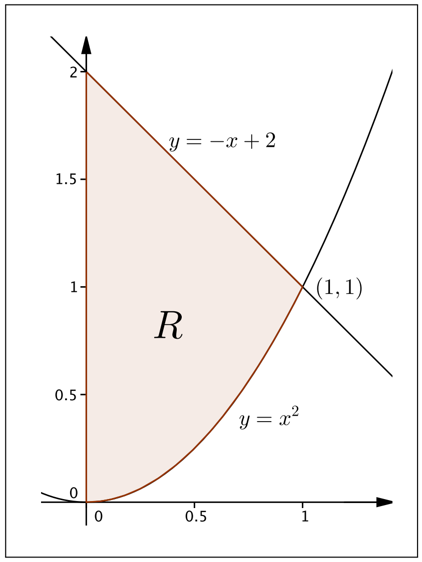
Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

UTALCA

IMAFI

1) Sea R la región del plano limitada por $y = x^2$, $\quad y = -x + 2$, $\quad x \geq 0$

a) [**3 ptos.**] Realice un esbozo ***ordenado y claro*** de la region $\mathcal{R}$.
Solución:



3 puntos

b) [**7 ptos.**] **Calcular** el área de la región R. **Solución:**

$$A = \underbrace{\int_0^1 (-x + 2 - x^2)\, dx}_{4pt} = \underbrace{\frac{7}{6}}_{3pt}$$

Nota: También se puede calcular respecto al eje Y de la siguiente manera

$$A = \underbrace{\int_0^1 \sqrt{y}\, dy}_{2pt} + \underbrace{\int_1^2 (2 - y)\, dy}_{2pt} = \underbrace{\frac{7}{6}}_{3pt}$$

c) [**10 ptos.**] Expresar ***sin calcular***, las integrales que permiten calcular el volumen que se genera al rotar R en torno al eje X, ***usando el método de los discos.***
Solución:

$$V = \pi \int_0^1 [(-x + 2)^2 - (x^2)^2]\, dx$$

10 puntos

d) [**10 ptos.**] Expresar ***sin calcular***, las integrales que permiten calcular el volumen que se genera al rotar R en torno a $y = 2$, ***usando el método de los casquetes.***
Solución:

$$V = 2\pi \left(\underbrace{\int_0^1 (2 - y)\sqrt{y}\, dy}_{5pt} + \underbrace{\int_1^2 (2 - y)(2 - y)\, dy}_{5pt} \right)$$

2) **[15 ptos.]** Determine una función real continua $y = f(x)$ y el valor de a, de modo que que se verifique:

$$2x^2 = a + \int_2^{2x} \sqrt{1 + f(t)^2}\, dt \quad \forall x \geq 1$$

Solución:

Derivando a ambos lados tenemos que :

$$4x = \sqrt{1 + f(2x)^2} \cdot 2$$

5 puntos

despejando se tiene que

$$f(2x)^2 = 4x^2 - 1$$

Por lo tanto

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

5 puntos

Ahora

$$\int_2^{2x} \sqrt{1 + f(t)^2}\, dt = \int_0^2 t\, dt = 2x^2 - 2$$

Por lo que para que la igualdad de cumpla $a = 2$

5 puntos

3) **[15 ptos.]** Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_0^{+\infty} kxe^{-2x}\,dx = 9$$

Solución:

$$\int_0^{+\infty} kxe^{-2x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} kxe^{-2x}\,dx$$

3 puntos

Para la integral hacemos $u = kx, \quad dv = e^{-2x}\,dx, \quad du = k\,dx, \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$$\begin{aligned}\int_0^{b} kxe^{-2x}\,dx &= -\frac{kx}{2}e^{-2x} + \frac{k}{2}\int_0^{b} e^{-2x}\,dx \\ &= -\frac{kx}{2}e^{-2x} - \frac{k}{4}e^{-2x}\Big|_0^b \\ &= -\frac{kbe^{-2b}}{2} - \frac{1}{4}ke^{-2b} + \frac{1}{4}k\end{aligned}$$

3 puntos

Por lo tanto

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} kxe^{-2x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} -\underbrace{\frac{kbe^{-2b}}{2}}_{LH\to 0} - \underbrace{\frac{1}{4}ke^{-2b}}_{\to 0} + \frac{1}{4}k = \frac{1}{4}k$$

4 puntos

Por lo que

$$\frac{k}{4} = 9 \Rightarrow k = 36$$

5 puntos